

L3 Math. fonda. Algèbre II: Groupes.

Descriptif

June 21, 2014

Références:

Aviva Szpirglas: “Algèbre L3”, p.217 à 249 pour les trois premiers chapitres du cours.

Daniel Perrin: “Cours d’Algèbre” , Groupes.

1 Groupes, sous-groupes, homomorphismes

Groupes, homomorphismes, sous-groupes et sous-groupes engendrés par une partie. Ordre d’un sous-groupe, groupes cycliques, monogènes. Classes latérales, théorème de Lagrange. Sous-groupes distingués (i.e. normaux), groupes quotients.

Théorème d’isomorphisme.

Classification des groupes monogènes et des groupes abéliens de type fini. Théorème des restes chinois.

2 Action de groupes, formules des classes

Action d’un groupe G sur un ensemble X . Soit $x \in X$, on notera $\omega(x)$ l’orbite de x , st_x le stabilisateur de x et X/G l’ensemble des orbites de X pour l’action de G .

(*)THEOREME(de Cayley) Si (G, \star) est un groupe fini d’ordre n alors (G, \star) est isomorphe à un sous groupe de S_n .

(*) Proposition Soit $x \in X$. L’application $\gamma : G \rightarrow \omega(x)$ définie par $\gamma(g) = g.x$ induit une bijection $\bar{\gamma} : G/st_x \rightarrow \omega(x)$.

(*) Corollaire Si G est un groupe fini, pour tout $x \in X$, $\#(G)/\#(st_x) = \#(\omega(x))$.

Formule des classes.

3 Théorèmes de Sylow

Applications aux groupes symétriques S_n , alternés A_n et diédraux D_n .

4 Produit direct et semi-direct de deux groupes

5 Les groupes orthogonaux $O_n(R)$

Soit E un espace euclidien de dimension n . Les réflexions orthogonales (comme famille génératrice), les rotations d'axe un sous-espace vectoriel de dimension $(n - 2)$. Etude de $O_2(R)$. Réduction d'un élément de $O_n(R)$. Sous groupes finis de $O_2(R)$ et de $O_3(R)$.

6 Le groupe linéaire.

K un corps, V un K -espace vectoriel de dimension n . Les dilatations et transvections comme famille génératrice de $GL(E)$. Calcul du centre et du sous-groupe des commutateurs de $GL(E)$.